

DESENVOLVIMENTO DE OBSERVADORES DINÂMICOS BASEADOS EM FUNÇÕES DE GREEN PARA APLICAÇÃO EM PROBLEMAS INVERSOS MULTIDIMENSIONAIS

Priscila Ferreira Barbosa de Sousa

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.
Av. João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Bloco M, Uberlândia
priscila@mecanica.ufu.br

Solidônio Rodrigues de Carvalho

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.
Av. João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Bloco M, Uberlândia
srcarvalho@mecanica.ufu.br

Gilmar Guimarães

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.
Av. João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Bloco M, Uberlândia
gguima@mecanica.ufu.br

Resumo. Este trabalho propõe a extensão de uma técnica experimental baseada na teoria de controle de sistemas dinâmicos aplicada a problemas inversos de transferência de calor. A proposta busca a aplicação da teoria dos observadores dinâmicos de estado no domínio da frequência em problemas inversos multidimensionais. O problema inverso analisado é representado pela estimativa de um fluxo de calor desconhecido imposto em uma região de um condutor a partir de medições de temperatura em locais distantes da fonte. A técnica do observador estima o fluxo de calor desconhecido através da minimização de duas componentes de erros de medição: a aleatória (inerente à medição) e a determinística (inerente ao algoritmo) Um requisito fundamental para o uso desses observadores é a obtenção da função transferência, G_h , do sistema dinâmico equivalente. Este trabalho propõe o uso de funções de Green para obtenção dessa função o que permite uma aplicação imediata da técnica em problemas multidimensionais além de proporcionar maior robustez ao método.

Palavras chave: problemas inversos, condução de calor, observadores, técnicas experimentais, fluxo de calor

1. Introdução

Os problemas inversos são encontrados em várias áreas da ciência e engenharia e podem ser aplicados sob diferentes formas. A principal característica deste tipo de abordagem é a obtenção da solução do problema físico de maneira indireta, como por exemplo, a determinação de campos térmicos em superfícies sem acesso, a obtenção da função resposta em frequência de uma estrutura complexa ou ainda, o diagnóstico de alguma doença por tomografia computadorizada. Em todos os casos, as condições de contorno destes problemas não são conhecidas ou são de difícil acesso. Diante disso, o problema pode ser resolvido a partir de informações oriundas de sensores localizados em pontos acessíveis.

Nos problemas inversos em condução de calor o uso de temperaturas experimentais permite a obtenção da solução do problema térmico, que pode ser: a obtenção das propriedades térmicas, obtenção do fluxo de calor superficial, obtenção da fonte de calor interna ou ainda a obtenção da temperatura superficial numa face sem acesso direto.

Na literatura, uma variedade de soluções analíticas e numéricas para os problemas inversos em condução de calor pode ser encontrada. Baseando-se no método de mínimos quadrados e no teorema de Duhamel, Beck *et al* (1985) desenvolveram o método da função especificada seqüencial que apresenta resultados estáveis em problemas unidimensionais. Além disso, em alguns casos, o método seqüencial pode ser estabilizado introduzindo-se o critério de estabilização proposto por Tikhonov & Arsenin (1977). Outra técnica que pode ser usada é o método do gradiente conjugado com equação adjunta, proposta por Özisik (1993) ou o método de "marcha - espacial" proposto por Raynaud & Sassi (1994).

Mais recentemente técnicas de filtro, como os observadores dinâmicos proposto por Blum & Marquardt (1997), têm sido empregadas na solução de problemas inversos em condução de calor. Alguns trabalhos têm demonstrado a eficiência e flexibilidade dos observadores dinâmicos na solução de problemas unidimensionais (Blum & Marquardt (1997) e Souza et al., (2006)). Esse trabalho propõe o desenvolvimento da técnica de observadores dinâmicos para a aplicação em problemas inversos multidimensionais através do uso de funções de Green para a obtenção da função transferência, G_h , do sistema dinâmico equivalente.

2. Fundamentos

A técnica de solução de problemas inversos baseada em observadores dinâmicos pode ser dividida em dois procedimentos distintos: i) a obtenção da função transferência, G_h ; ii) a obtenção dos estimadores G_Q e G_n e implementação do algoritmo baseado em observadores. Uma descrição completa desse método pode ser encontrada no trabalho de Blum & Marquardt (1997). O procedimento para a obtenção da função transferência, G_h descrita por Blum & Marquardt tem como grande vantagem a sua facilidade de obtenção via uso de pacotes matemáticos como o Matlab^R. Entretanto, seu uso torna-se um pouco restritivo caso o modelo térmico seja multidimensional devido ao alto custo operacional. Uma breve descrição dessa técnica é apresentada na próxima seção. Logo a seguir, apresenta-se o novo procedimento para a obtenção de G_h proposto neste trabalho. Nesse caso, a técnica baseia-se na obtenção da função transferência através do uso de funções de Green e da definição de sistemas dinâmicos equivalentes tendo aplicação imediata em problemas multidimensionais.

2.1. Concepção do uso de observadores dinâmicos na solução de problemas inversos unidimensionais

2.1.1. Obtenção da função Transferência, G_h (procedimento proposto por Blum & Marquardt, (1997))

A Figura 1 apresenta uma amostra inicialmente a uma temperatura T_0 . O modelo térmico unidimensional transiente é representado por uma taxa de calor, $q(t)$, imposta a uma superfície enquanto a superfície oposta é mantida isolada. O problema inverso se define devido à taxa de calor $q(t)$ ser desconhecida.

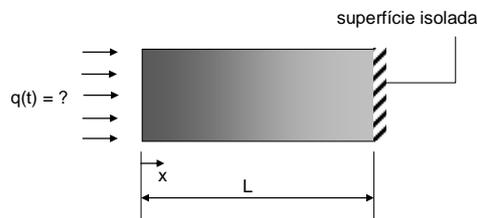


Figura 1. Esquema do modelo térmico unidimensional transiente.

A equação da difusão de calor que governa o problema pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1a)$$

sujeita às condições de contorno

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(t) = ? \quad (a \text{ ser estimado}) \quad t > 0 \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad t > 0 \quad (1c)$$

e à condição inicial

$$\theta(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (1d)$$

onde $\theta = T(x,t) - T_0$, sendo α a difusividade térmica e k a condutividade térmica da amostra em estudo.

O problema dado pelas Eqs. (1) pode, então, ser resolvido numericamente. Entretanto, como o fluxo de calor imposto é desconhecido, o procedimento para a solução do problema inverso prevê a aplicação da transformada de Laplace na equação discretizada apenas no espaço (usando volumes finitos), como mostra a Fig.2 (Blum & Marquardt, 1997)

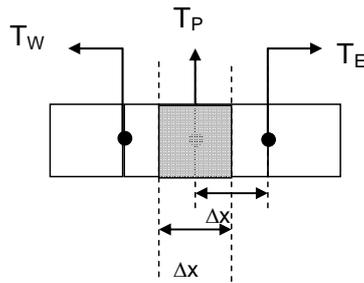


Figura 2. Esquema da discretização espacial usando volumes finitos.

Considerando uma discretização espacial uniforme em volumes finitos com um incremento regular de Δx a Eq. (1a) pode então ser escrita como

$$(T_w - T_p) + (T_e - T_p) = \frac{\Delta x^2}{\alpha} \frac{\partial T_p}{\partial t} \tag{2}$$

aplicando a transformada de Laplace na Eq.(2) obtém-se

$$\bar{T}_w + \bar{T}_e - \left(2 + \frac{\Delta x^2 s}{\alpha} \right) \bar{T}_p = 0$$

Se ainda, esse mesmo procedimento for aplicado às condições de contorno (Eqs. 1b e 1c), pode-se escrever as equações discretizadas para cada nó em forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2\alpha} s \right) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \left(2 + \frac{\Delta x^2 s}{\alpha} \right) & -1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2\alpha} s \right) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{T}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{q}(s) dx \end{bmatrix} \tag{3}$$

O conjunto de equações dado pela Eq.(3) pode então ser resolvida de forma simbólica através do uso do software Matlab^R e a função transferência G_h pode ser obtida para qualquer nó como,

$$\frac{\bar{T}(x, s)}{\bar{q}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_h} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n_h} a_i s^i} = \bar{G}_h(x, s) \Leftarrow \text{Função transferência} \tag{5}$$

Apenas como exemplo, para uma discretização espacial de ordem $m_h=7$, a função $G_h(L,s)$ calculada na superfície oposta à taxa de calor $q(t)$ pode ser dada por

$$\bar{G}_h(L, s) = \frac{5.988 e^{-27}}{2.4e^{-40} s^7 + 1.6e^{-36} s^6 + 4.06e^{-33} s^5 + 5.05e^{-30} s^4 + 3.03e^{-27} s^3 + 8.02e^{-25} s^2 + 6.16e^{-23} s} \tag{6}$$

Uma vez obtido $G_h(L,s)$ pode-se obter os estimadores G_Q, G_N que são baseados na minimização dos erros aleatórios e sistemáticos contidos na medição e no modelo térmico. Uma breve descrição do algoritmo inverso e da obtenção dessas funções é descrita a seguir.

2.1.2. Obtenção dos estimadores G_Q, G_N e implementação do algoritmo inverso.

O problema térmico descrito pela Eq.(1) pode ser representado por um sistema dinâmico representado pela Fig. 3 em diagrama de bloco como (Blum & Marquardt, 1997):

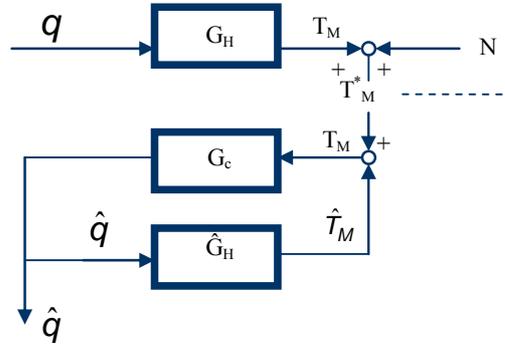


Figura 3. Diagrama de bloco de um sistema dinâmico (Blum & Marquardt, 1997)

Do diagrama de bloco pode-se observar:

i) o fluxo de calor desconhecido aplicado ao condutor G_h , resulta na temperatura medida T_M^* corrompida por um ruído (N),

$$T_M^* = T_M + N = G_h Q + N \tag{7}$$

ii) um fluxo de calor estimado \hat{q} é calculado a partir de uma entrada de valores medidos de temperatura T_M^* . O estimador pode então ser representado pela função de transferência em malha fechada,

$$\hat{q} = \frac{G_c}{1 + G_c G_h} T_M^* \tag{8}$$

que caracteriza o comportamento do algoritmo de solução. As funções de transferência do sinal e do ruído, G_Q e G_N respectivamente, são encontradas combinando as Eqs.(7) e (8),

$$\hat{q} = \underbrace{\frac{G_c G_h}{1 + G_c G_h}}_{G_Q} q + \underbrace{\frac{G_c}{1 + G_c G_h}}_{G_N} N \tag{9}$$

Da Equação (9) obtém-se:

$$G_N = G_Q G_H^{-1} \quad \text{ou} \quad |G_N(j\omega)| = \frac{|G_Q(j\omega)|}{|G_H(j\omega)|} \tag{10}$$

Observa-se que na Eq. (10), existem 2 possibilidades para a amplificação do ruído $|G_N|$, que dependem de G_Q :

i) se a frequência, ω , se encontra dentro da banda e $|G_Q|=1$, $|G_N(j\omega)| = |G_H(j\omega)|^{-1}$.

ii) se a frequência, ω , está além ω_c e $|G_Q| \rightarrow 0$. O $|G_N| \rightarrow 0$, se $|G_Q| \rightarrow 0$ mais rápido que $|G_H| \rightarrow 0$.

Quanto mais rápida for a atenuação de $|G_Q|$ além de ω_c , menor a sensibilidade do algoritmo a ruídos. Desta forma a equação que se refere ao estimador pode ser escrita como,

$$\hat{q}(s) = G_N(s) \times T_M^*(s) \tag{11}$$

Conclui-se assim que a amplificação do ruído medido $|G_N|$ para um dado filtro passabanda do sinal da função transferência G_Q pode ser minimizado, maximizando o “roll-off” de $|G_Q|$. Assim a formulação da função de transferência do filtro G_Q deve ser tal que satisfaça as propriedades de filtragem desejadas:

- i) comportamento passa-baixa;
- ii) curva monotônica;
- iii) queda no sinal mais acentuada possível a partir da frequência de corte.

Os principais critérios para escolha de um filtro apropriado são:

- i) sua estrutura (recursivo ou não recursivo);
- ii) o seu tipo e;
- iii) sua ordem.

Quanto à formulação, o filtro escolhido é o recursivo (IIR), i.e., a saída depende não só do valor da entrada, mas também do valor da saída anterior.

Quanto ao tipo, opta-se pelo Chebychev tipo I, pois a resposta da magnitude da frequência cai monotonicamente além da frequência de corte como anteriormente requerido. No domínio de Laplace a função transferência do filtro Chebychev tipo I assume a seguinte forma:

$$G_Q(s) = \frac{k_{cheb}}{(s - s_{Cheb,1})(s - s_{Cheb,2}) \cdots (s - s_{Cheb,n_Q})} \quad (12)$$

A ordem do polinômio de Chebychev é determinada pelo esquema da discretização espacial do modelo e pela ordem do mesmo, e deve satisfazer a condição de $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_N| = 0$.

Com o filtro escolhido obtém-se a função de transferência do estimador (G_N), através da relação entre a função transferência do modelo condutor (G_H) e a função transferência do filtro (G_Q), Eq. (10).

A Equação (10) que descreve o estimador pode ser escrita na forma,

$$G_N(s) = \frac{\hat{q}(s)}{T_M^*(s)} \xrightarrow{\text{no domínio Z temos}} G_N = \frac{\sum_{i=0}^{n_n} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_n} a_i z^{-i}} \quad (13)$$

obtendo-se

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i T_M^*(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}(k-i) \Rightarrow \text{Equação diferença} \quad (14)$$

Como o observador é um esquema on-line, i.e. estima o fluxo requerido com base em medidas de temperaturas do tempo, atual e passado, isso acarreta uma mudança ou atraso de fase, interferindo nos valores estimados. Se o problema inverso for resolvido off-line, o atraso de fase pode ser removido, adaptando uma filtragem de trás para frente. Pela filtragem reversa de um sinal no tempo, entendemos filtrar a seqüência do tempo reversa por:

$$f_k \rightarrow F(z) \quad e \quad f_{-k} \rightarrow \bar{F}(z)$$

$$1^\circ \text{ passo: } q_F(z) = G_N(z)T_M^*(z); \quad 2^\circ \text{ passo: } q_B(z) = G_Q(z)\bar{Q}_F(z); \quad 3^\circ \text{ passo: } \hat{q}(z) = \bar{q}_F(z).$$

Os passos acima descrevem o funcionamento do algoritmo. Logo aplicando transformada “z” na equação do segundo passo, obtemos mais uma equação diferença.

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{n_n} b_i q(k-i) - \sum_{i=1}^{n_n} a_i \hat{q}(k-i) \Rightarrow \text{Equação diferença} \quad (15)$$

Assim, é possível se estimar o fluxo desconhecido, a partir das Eqs.(14) e (15). Com os valores medidos de temperatura na posição $x=L$, faz-se uma primeira estimativa do fluxo, através da Eq. (14). Reverte-se a seqüência obtida no tempo e filtra-se este fluxo com a Eq. (15). Revertendo a seqüência de fluxo filtrada, têm-se o fluxo estimado.

2.2. Obtenção da função transferência G_h para um problema 3D-transiente

2.2.1 Problema térmico original

Seja o problema térmico tridimensional transiente representado pela Fig. 4 e descrito pela equação da difusão de calor:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{16a}$$

na região R ($0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$) e $t > 0$, sujeito às condições de contorno:

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = q_1(t) \text{ na } S_1 \text{ (} 0 \leq x \leq x_H, 0 \leq z \leq z_H \text{)} \tag{16b}$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \text{ na } S_2 \text{ (} x, z \in S \mid (x, z) \notin S_1 \text{)}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=c} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \tag{16c}$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = T_0 \tag{16d}$$

onde S é definido por ($0 \leq x \leq a, 0 \leq z \leq c$) e x_H e z_H são os limites da região S_1 onde a taxa de calor é aplicada

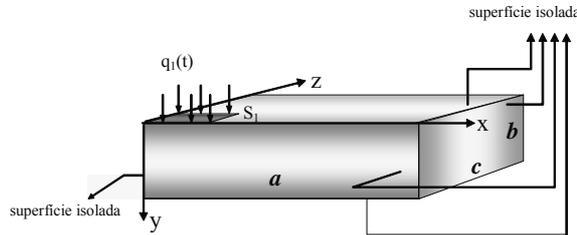


Figura 4. Problema original, 3D transiente

A solução das Eqs. (16) pode ser dada em termos de função de Green como

$$T(x, y, z, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \left[\int_0^{x_H} \int_0^{z_H} G_h^+(x, y, z, t/x', y', z', \tau) \Big|_{y'=0} q_1(\tau) dx' dz' \right] d\tau \tag{18}$$

ou ainda

$$T(x, y, z, t) = \int_{\tau=0}^t [G_h(x, y, z, t/\tau) q_1(\tau)] d\tau \tag{19}$$

onde

$$G_h(x, y, z, t/\tau) = \frac{\alpha}{k} \int_0^{x_H} \int_0^{z_H} G_h^+(x, y, z, t/x', y', z', \tau) \Big|_{y'=0} dx' dz'$$

então aplicando-se a definição de convolução (Ozisik, 1993), representada pelo símbolo (*), a Eq.(19) para uma temperatura localizada na superfície oposta da amostra, pode ser escrita como

$$T(x, y, z, t) = G_h(x, y, z, t - \tau) * q_1(\tau) \quad (20)$$

Se ainda, o modelo térmico da Fig. 4 puder ser representado por um sistema dinâmico do tipo entrada/ saída, como mostrado na Fig. 5

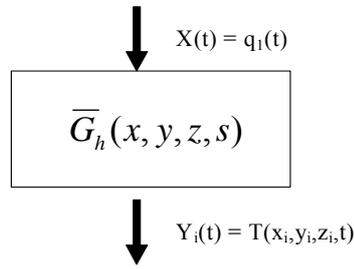


Figura 5. Sistema dinâmico equivalente ao modelo térmico

Então aplicando-se a transformada de Laplace (Ozisk, 1993) em ambos os lados da Eq.(20) obtém-se

$$\bar{T}(x, y, z, s) = \bar{G}_h(x, y, z, s) \bar{q}_1(s) \quad (21)$$

onde a Transformada de Laplace de uma função F(t) é definida por

$$\mathcal{L} [F(t)] = \bar{F}(s) = \int_t^{\infty} e^{-st'} F(t') dt'. \quad (22)$$

A obtenção da função transferência $\bar{G}_h(x, y, z, s)$ se completa através do uso de um problema auxiliar, que possui as mesmas características físicas do problema original, porém impondo-se um sinal de entrada de valor unitário na mesma localização do fluxo de calor do problema original (S_1) e com temperatura inicial zero .

2.2.2 Problema térmico auxiliar

O problema auxiliar citado anteriormente pode ser descrito como

$$\frac{\partial^2 T^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^+}{\partial t} \quad (23a)$$

na região R ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$) e $t > 0$, sujeito às condições de contorno:

$$-k \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=0} = 1 \text{ em } S_1 \quad (0 \leq x \leq x_H, \quad 0 \leq z \leq z_H) \quad (23b)$$

$$-k \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \text{ em } S_2 \quad (x, z \in S \mid (x, z) \notin S_1)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T^+}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial T^+}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial T^+}{\partial z} \Big|_{z=c} = \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (23c)$$

e à condição inicial

$$T^+(x, y, z, 0) = 0 \quad (23d)$$

Analogamente à solução do problema térmico original pode-se obter, usando-se funções de Green, a solução do problema térmico auxiliar

$$T^+(x, y, z, t) = G_h(x, y, z, t - \tau) * 1 \quad (24)$$

uma vez que, $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, obtém-se no domínio de Laplace

$$\bar{T}^+(x, y, z, s) = \bar{G}_h(x, y, z, s) \frac{1}{s} \quad (25)$$

Como o sistema dinâmico equivalente é linear, invariante e fisicamente realizável (Bendat & Pierson, 1986) a função resposta $\bar{G}_h(x, y, z, s)$ é a mesma qualquer que seja o conjunto entrada/saída. Logo, da Eq.(25) obtém-se

$$\bar{G}_h(x, y, z, s) = s \bar{T}^+(x, y, z, s) \quad (26)$$

Assim, para a identificação completa de $\bar{G}_h(x, y, z, s)$, resta, portanto, a obtenção de $\bar{T}^+(x, y, z, s)$ em um determinada posição, ou seja, $\bar{T}^+(r_i, s)$, onde $r_i = (x_i, y_i, z_i)$. Propõe-se, nesse trabalho, um procedimento simples e eficaz para a obtenção de $T^+(r_i, s)$. Baseando-se nos princípios de correlação entre dois sinais ergóticos tipo entrada e saída (Bendat & Pierson, 1986), como mostra a Fig. 6 a função resposta em frequência, $\bar{G}_h(r_i, s)$, pode ser definida em qualquer intervalo de amostragem t_a , ou seja,

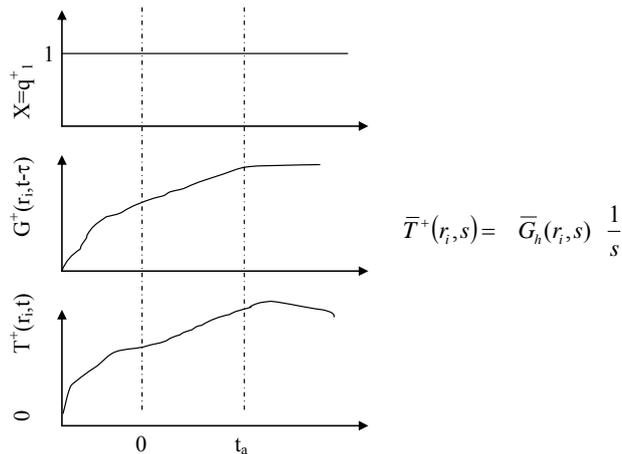


Figura 6. Exemplo de amostragem para o cálculo da correlação entre dois sinais dinâmicos.

e portanto, por conveniência se a função $T^+(r_i, s)$ pode ser aproximada por um polinômio no intervalo de amostragem $[0, t_a]$ então, nesse caso, pode-se escrever,

$$T^+(r_i, t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + \quad (27)$$

Tomando-se a transformada de Laplace da Eq.(27) obtém-se (Ozsisik, 1993)

$$\bar{T}^+(r_i, s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{2s^3} + \frac{a_4}{6s^4} + \dots + \quad (28)$$

e portanto da Eq.(26)

$$\bar{G}_h(r_i, s) = s \bar{T}^+(r_i, s) = s \left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{2s^3} + \frac{a_4}{6s^4} + \dots + \right] \quad (29)$$

ou ainda

$$\bar{G}_h(r_i, s) = a_1 + \frac{a_2}{s} + \frac{a_3}{2s^2} + \frac{a_4}{6s^3} + \dots + \quad (30)$$

Algumas observações podem ser feitas sobre a obtenção da Eq. (30). Observa-se que da teoria de frações parciais, se $\bar{G}_h(r_i, s)$ é expresso em frações parciais, sua inversão pode ser prontamente obtida. Ainda, como a Eq.(30) não apresenta qualquer pólo para $s > 0$ então a sua inversão é estável o que garante robustez ao algoritmo de inversão dado pelas Eqs.(14 e 15). Pode-se ainda, com o mesmo procedimento, abordar indistintamente um problema térmico uni, bi ou tridimensional, desde que as condições de contorno não ativas sejam homogêneas e o fluxo de calor desconhecido seja imposto em uma determinada região. Uma aplicação tridimensional desse procedimento encontra-se em andamento, sendo um dos grandes objetivos dessa técnica, a obtenção do campo de temperatura na interface peça-ferramenta de um processo de usinagem ortogonal. Apresenta-se a seguir um resumo dos passos básicos para a obtenção de $\bar{G}_h(r_i, s)$.

Uma vez determinado a função $\bar{G}_h(r_i, s)$ resta a obtenção das funções G_Q , G_h e a implementação do algoritmo baseado nos observadores, como descrito na seção 2.1.2.

Apresenta-se a seguir resultados de dois casos testes em problemas uni e tridimensionais. Em ambos os testes dois tipos diferentes de fluxo de calor são analisados, sendo o problema unidimensional abordado para efeito de comparação entre os dois procedimentos de obtenção de G_h e o problema 3D para a análise de potencialidade de aplicação do método em problemas multidimensionais.

3. Análise e Discussão de Resultados

3.1. Temperaturas Experimentais e a função G_h para um problema 1D

Temperaturas experimentais foram simuladas numericamente. Ou seja, a partir de um fluxo de calor conhecido, $q(t)$, obtêm-se a solução do problema direto (campo de temperatura). A evolução de temperatura em um determinado ponto é então acrescida de um ruído, ε_i , e assumida como uma temperatura medida “experimentalmente”. Esta temperatura é usada para a estimação do fluxo de calor cujo valor inicial é diferente do fluxo a ser estimado. Nesse primeiro caso, esse valor é assumido igual a zero. Assim,

$$Y(r_i, t) = T(r_i, t) + \varepsilon_j. \quad (31)$$

O meio em estudo simula uma amostra de cobre de $L=3$ mm de espessura com condutividade térmica $k=401$ W/mK e difusividade térmica $\alpha= 117 \cdot 10^{-6}$ m²/s submetida a duas formas diferentes de fluxo de calor: i) fluxo de calor senoidal e; ii) fluxo de calor em forma triangular. Para o caso 1D, a temperatura é simulada na face oposta ao fluxo, $r_i = L$. As Figuras 7a) e 7b) apresentam as evoluções de temperatura “medidas” na superfície oposta ao fluxo de calor, $Y(L,t)$, considerando os dois tipos de fluxo e ausência de ruído, $\varepsilon_j=0$.

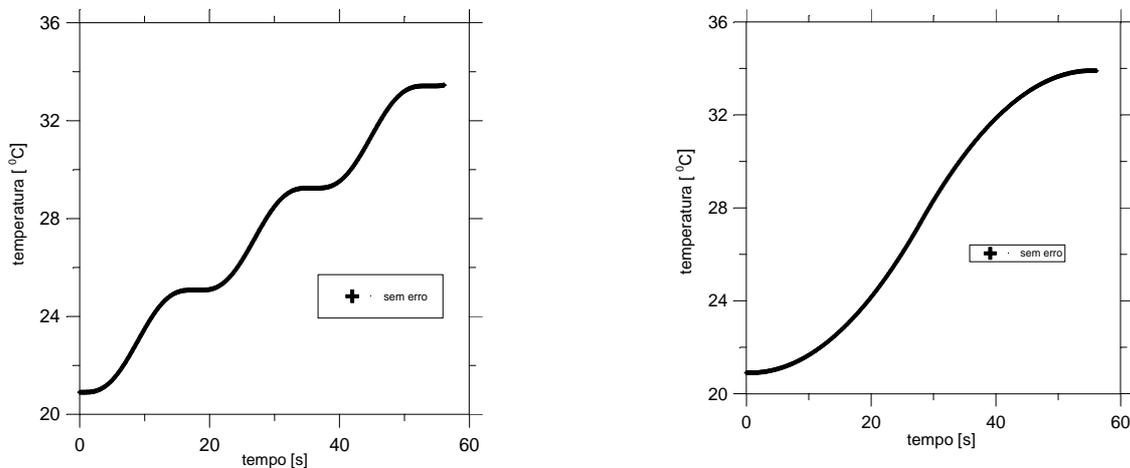


Figura 7. Temperaturas experimentais, simuladas numericamente com $\varepsilon_j = 0.0$: a) fluxo senoidal; b) fluxo triangular.

Apresentam-se na Fig. 8 os módulos e a fases da função G_h obtida pelos dois procedimentos, a técnica descrita por Blum & Marquardt, (1997) usando-se uma discretização espacial com 11 volumes finitos, aqui denominada de método 1 e a proposta neste trabalho denominada de método 2.

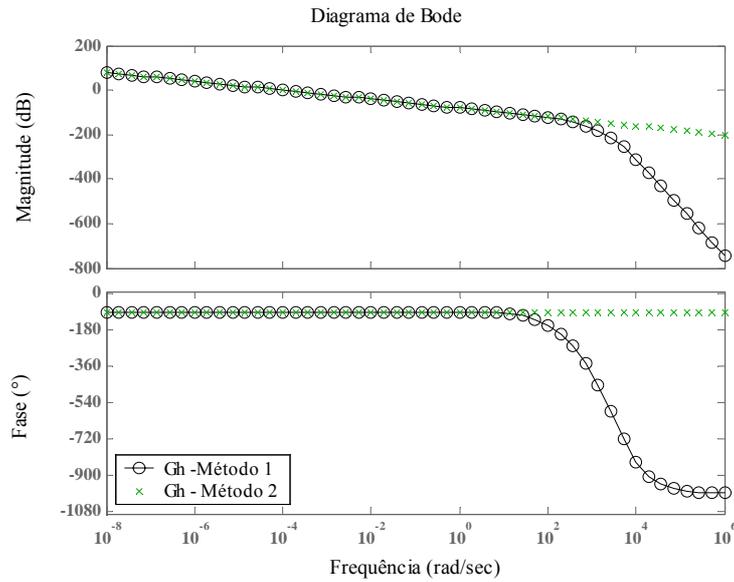


Figura 8. Função transferência, G_h : a) módulo; b) fase.

3.2 Estimativas de fluxo de calor: problema unidimensional transiente

Apresenta-se nesta seção uma comparação entre o fluxo de calor real (imposto) e os fluxos de calor estimados usando-se a técnica de observadores. O problema térmico estudado é o mesmo descrito na seção (2.1.1) com dois tipos diferentes de fluxo de calor sendo impostos em $x=0$: i) forma senoidal e; ii) forma triangular. A função transferência G_h é obtida baseando-se nos dois modelos: i) descritos por Blum & Marquardt, (1997), aqui denominado método clássico, Eq. (13) e; ii) o modelo proposto no presente trabalho, aqui denominado método novo, Eq. (30). A comparação é feita a partir de medições de temperatura sem erros experimentais, Figs. 7a) e 7b), para os dois tipos de fluxo: senoidal e triangular (Figs. 9 a) e 9 b)).

Observa-se que as duas técnicas apresentam resultados absolutamente concordantes entre si e com os fluxos impostos. Isso se deve ao fato da frequência de corte usada ser menor que $\omega_c = 80 \text{ rad/s}$, uma vez que para valores inferiores a essa frequência as funções G_h calculadas pelos dois procedimentos têm o mesmo comportamento.

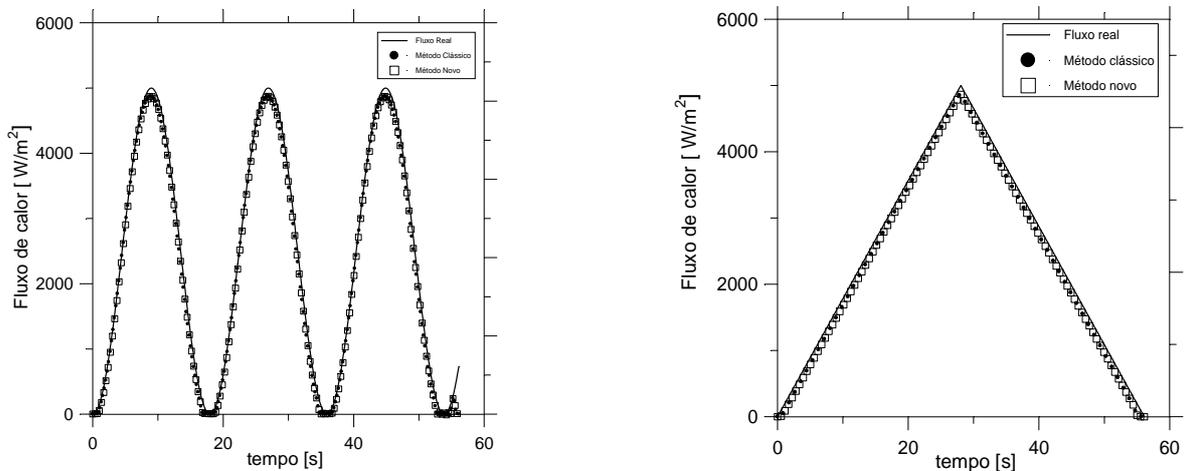


Figura 9. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = \pm 0.0 \text{ } ^\circ\text{C}$ a) fluxo senoidal; b) fluxo triangular (teste 1D)

3.3 Estimativas de fluxo de calor: problema tridimensional transiente, problema 3D

Nesta seção é abordado o desempenho da técnica proposta para o problema tridimensional transiente proposto na seção (2.2). Nesse caso, são apresentadas estimativas considerando a adição de ruídos da ordem de $\pm 0.5^\circ\text{C}$ (1.5% da temperatura máxima) nos dados de temperatura originais obtidos a partir de quatro posições distintas da amostra simulada. A Figura 10 apresenta a localização das quatro temperaturas experimentais simuladas e a Figura 11 os resultados do fluxo de calor estimado a partir do uso independente de cada temperatura.

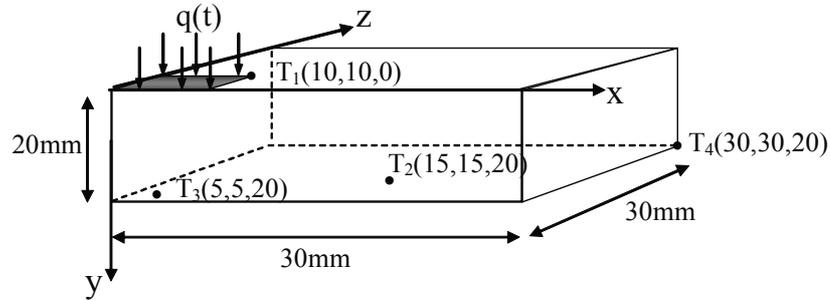


Figura 10. Localização das quatro temperaturas simuladas

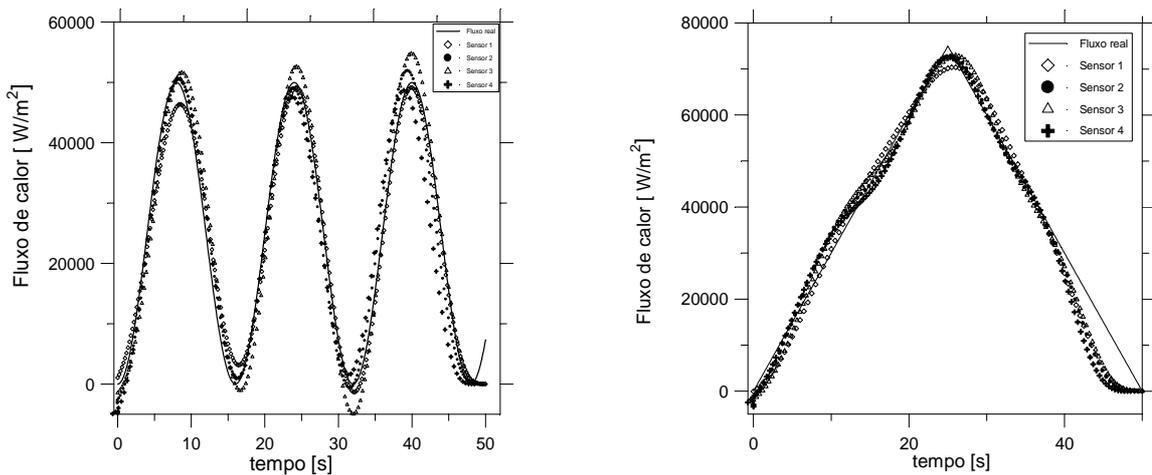


Figura 11. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = \pm 1.5^\circ\text{C}$ a) fluxo senoidal; b) fluxo triangular (teste 3D)

Observa-se que no fluxo de calor estimado para o caso senoidal o sensor posicionado próximo a fonte (T_1) apresenta o melhor resultado, como esperado. Entretanto, mesmo sensores posicionados bem distantes da fonte conseguem uma estimativa razoável, sendo que o maior desvio ocorre apenas em regiões próximas ao pico. Para o caso triangular, os comportamentos das estimativas são praticamente independentes da posição. Esse resultado demonstra a grande flexibilidade da técnica quanto à escolha do posicionamento do sensor em um problema real. O uso de modelos tridimensionais permite ainda a abordagem de problemas reais com geometrias complexas, uma vez que a solução do modelo é obtida numericamente. Pode-se citar, nesse caso, o estudo de problemas térmicos em ferramentas ortogonais cujo estudo encontra-se em desenvolvimento.

4. Conclusão

O método dos observadores se mostrou eficiente para a solução de problemas inversos em condução de calor. A presença de erros aleatórios neste tipo de problema representa um fator decisivo no desempenho das técnicas, uma vez que em problemas inversos esses erros são amplificados. A proposta de obtenção da função transferência baseada em funções de Green obtidas numericamente dá uma grande flexibilidade à técnica permitindo a abordagem de forma direta de problemas tridimensionais transientes encontrados na maioria dos problemas físicos da natureza.

5. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio dos órgãos de fomento a pesquisa: CNPq, Capes e Fapemig.

6. Referência

- Alifanov, O. M., 1975 "Solution of na Inverse Problem of Heat Conduction by Iterations Methods", Journal of Engineering Physics, Nov.10.
- Beck, J.V., Blackwell, B. & St. Clair, C. R., 1985, "Inverse Heat Conduction, Ill-posed Problems", Wiley Interscience Publication, New York.
- J. S. Bendat, A. G. Piersol, 1986 "Analysis and Measurement Procedures", Wiley-Interscience, 2nd ed., USA, 1986, p. 566.
- Blum, J.W. Marquardt, W., 1997 "An optimal solution to inverse heat conduction problems based on frequency-domain interpretation and observers", Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 32, December 1997, 453-478.
- Özisik, M. N., 1993, "Heat Conduction", John Wiley & Sons, New York.
- Raynaud, M. & Sassi, M., 1994, "Étude de Faisabilité de la Détermination des Températures et Flux Surfâciques Transitoires D'une Enveloppe Sphérique a Partir de Mesures de Températures Internes", Rapport Final, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1994.
- Tikhonov, A. N. & Arsenin, V. Y., 1977, "Solutions of Ill-posed Problems", Winston, Washington, DC, 1977.
- Sousa, P.F.B, Carvalho, S.R, Guimarães, G., 2006, "Análise Do Desempenho de observadores dinâmicos na investigação de problemas inversos em condução de calor, IV Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Agosto, Recife-PE
- Vanderplaats, G.N., 1995, "Design optimization tools, Vanderplaats Research &Development", Inc., Colorado Springs.

DESENVOLVIMENTO DE OBSERVADORES DINÂMICOS BASEADOS EM FUNÇÕES DE GREEN PARA APLICAÇÃO EM PROBLEMAS INVERSOS MULTIDIMENSIONAIS

Priscila Ferreira Barbosa de Sousa

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.
Av. João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Bloco M, Uberlândia
priscila@mecanica.ufu.br

Solidônio Rodrigues de Carvalho

Universidade Federal de Uberlândia
Av. João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Bloco M, Uberlândia
srocarvalho@mecanica.ufu.br

Gilmar Guimarães

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica.
Av. João Naves de Ávila, 2121, Campus Santa Mônica, Bloco M, Uberlândia
gguima@mecanica.ufu.br

Abstract. This work proposes a new procedure for the study of inverse heat conduction problem. The dynamic observer state technique, used here, is developed to solve not only one-dimensional but also three-dimensional heat transfer problem. The inverse heat conduction problem is represented by a classical inverse definition, i.e., an unknown heat flux heat is imposed at a front surface of a sample. The heat flux is then estimated by using the dynamic observer techniques and temperature data simulated from "sensor" located at the sample far from the heat source. The derivation of optimal observer equations follows directly from a novel interpretation on inverse heat conduction in the frequency domain: solving the IHCP is viewed as a filter design problem in which the reconstructed heat flux is obtained by low-pass filtering of the true heat flux. The transfer function, crucial for these techniques, is obtained here using the Green function method. This procedure allows a great flexibility to the technique and represents an easy way to apply the observer method to multidimensional problem.

Keywords: inverse problems, heat conduction, dynamic observers, experimental techniques, heat flux